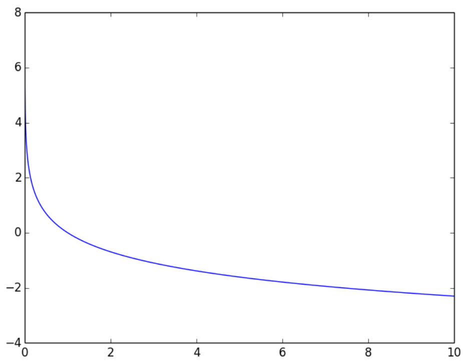
Cahier de vacances - correction, semaine 4

Lundi

1. On trouve $\boxed{e^{i\frac{\pi}{2}}}$ (soit i).
2. $\boxed{\int_1^2 (\frac{1}{x+1}+6)dx = \ln(3)-\ln(2)+6 = \ln\frac{3}{2}+6}$
3. $\boxed{x \mapsto \frac{5}{5x} = \frac{1}{x}}$
4. $\boxed{\cos(\pi)+i\sin(3\pi) = -1}$ et $\boxed{\cos(\frac{\pi}{2})-i\sin(\frac{\pi}{2}) = -i}$
5. On a $a^2 = \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}).(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}) = b^2+c^2+2\underbrace{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC}}_{=bc\cos(\pi-\theta} = b^2+c^2-2bc\cos\theta$
6. Il suffit de se souvenir que 1m^3 pèse 1t, soit un débit de 28,3 millions de tonnes par jour.

Mardi

1. $\boxed{e^{in\pi} = (e^{i\pi})^n = (-1)^n}$
2. $t : u \mapsto \frac{1}{288}(4u-213)^{72}$.
3. Il s'agit de la courbe de $x \mapsto \ln x$, "symétrisée" par rapport à l'axe des abscisses.



4. $\boxed{f(x+86) = \cos(\frac{2\pi}{43}x+4\pi) = \cos(\frac{2\pi}{43}x) = f(x)}$
5. On intègre une fonction qui est toujours positive sur l'intervalle d'intégration. Le résultat est donc forcément positif.
6. C'est un petit jeu sur les unités : $\frac{15\text{kW.h}}{1\text{m}^2.1\text{an}} \times 12\text{m}^2 = \frac{180\text{kWh}}{1\text{an}} \times \frac{1\text{an}}{365.25\text{jour}} \times \frac{1\text{jour}}{24\text{h}} = 20,5\text{kW}$

Mercredi

1. $\frac{150}{i} = -150i$ donc $\boxed{|\frac{150}{i}| = 150}$ et un argument est $\boxed{-\frac{\pi}{2}}$
2. $\int_0^1 (2x-1)^2 dx = [\frac{1}{6}(2x-1)^3]_0^1$, on trouve $\boxed{\frac{1}{3}}$
3. $\boxed{t_0 = \frac{1}{3}}$ $(e^{-\frac{1}{t\,0}} = e^{-3} \Leftrightarrow -\frac{1}{t\,0} = -3 \Leftrightarrow t_0 = 3)$
4. $\boxed{\sin(2022\pi + x) = \sin(x)}$ (sin est 2πpériodique)
5. Si on prend un triangle ABC rectangle en A, et qu'on appelle θ l'angle ABC, alors $\tan\theta = \frac{AC}{AB}$. On remarque géométriquement que faire tendre θ vers $\frac{\pi}{2}$ revient à faire tendre AC vers $+\infty$, et donc bien $\tan\theta$ vers $+infty$.

Jeudi

1. $\boxed{a = ae^{i0},\ ia = ae^{i\frac{\pi}{2}},\ a + ia = a\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}$
2. $[50, +\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{2}{\pi+1}(\frac{x}{2} - 23)^{\pi+1}$.
3. $\boxed{\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty\,;\ \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty\,;\ \lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0 \text{ et } \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty}$
4. $\boxed{\cos(\frac{7\pi}{2}) = 0 \text{ et } \sin(\frac{7\pi}{2}) = -1}$
5. $1 + \tan^2 x = 1 + \frac{a^2}{c^2} = \frac{c^2+a^2}{c^2}$ et $\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{b^2}{c^2}$. Or d'après Pythagore, $a^2 + c^2 = b^2$ d'où la formule annoncée.
6. On peut le faire de deux façons :
   - soit géométriquement : les aires entre la courbe et l'axe des abscisses de part et d'autre de l'axe des ordonnées sont opposées, donc leur somme est nulle
   - soit par le calcul : $\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(-x)dx + \int_0^a f(x)dx = 0$

Vendredi

1. $\boxed{|Ae^{i\phi}| = A \text{ si } A \geq 0 \text{ et } |Ae^{i\phi}| = -A \text{ si } A < 0}$. Un argument vaut $\boxed{\phi \text{ si } A > 0}$, $\boxed{\phi + \pi \text{ si } A < 0 \text{ et est non défini si } A = 0}$ (car $Ae^{i\phi} = -Ae^{i(\phi+\pi)}$ puisque $e^{i\pi} = -1$)
2. $\boxed{x \mapsto \frac{1}{3}\sin(3x+5)}$
3. On utilise $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ soit $\boxed{y = -x + 1}$
4. Elle a au moins une solution si $\boxed{a \in \mathbb{R}^+}$
5. (ceci se fait de tête après une division de la seconde équation par 5) : $x = 3; y = 0$
6. Sur $[0, \pi]$ la fonction sin est positive, donc le résultat ne peut être que positif. Si un des deux résultats est correct, c'est forcément le premier.

Samedi

1. Ceci donne 0 (on a $\forall a \in \mathbb{N}$, $i^a = -i^{a+2}$)
2. $\boxed{\int_0^1 (x-1)^2 dx = [\frac{1}{3}(x-1)^3)]_0^1 = \frac{1}{3}}$
3. $\boxed{8a}$ (pour $u \geq 0$, $(\frac{u}{a} - 3)^2 - 25 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{u}{a} - 8\right)\left(\frac{u}{a} + 2\right) = 0$, ce qui mène à $\frac{u}{a} = 8$ si on ne cherche qu'une solution positive.)
4. $\boxed{\sin(2n\pi + x) = \sin(x)}$ car sin est 2π-périodique.
5. A $\frac{\pi}{2}$ ou à 90°.
6. Cette fonction :
   - est T périodique
   - est $2T$ périodique (et plus généralement nT périodique)
   - n'est pas $\frac{T}{2}$ périodique.