Cahier de vacances

—Semaine 1 —

Lundi

1. Donner un argument et le module de i^3.
2. Donner une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de $f : x \mapsto \frac{1}{x^2}$
3. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x+3}{3x-81}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x+3}{3x-81}$
4. Soient $a,\ b \in \mathbb{R}$. Exprimer $\sin(a+b)$ en fonction $\sin(a)$, $\cos(a)$, $\sin(b)$ et $\cos(b)$
5. Un point P fait le tour d'un cercle de rayon $3cm$ en 1 minute. Donner sa vitesse, la fréquence du mouvement (= le nombre de tours par seconde), la pulsation du mouvement (= le nombre de radian parcourus par seconde)
6. Donner le volume d'une boule de rayon b

Mardi

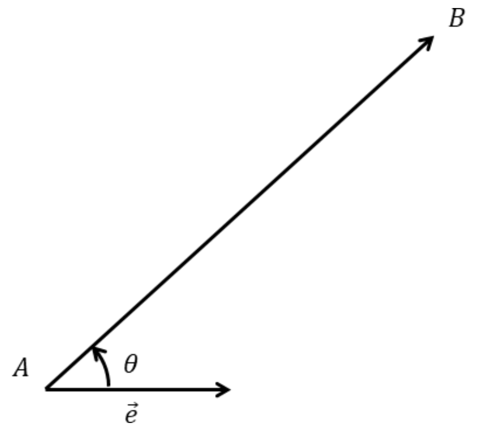
1. Simplifier $e^{i\frac{21\pi}{2}} + e^{i\frac{20\pi}{2}}$
2. Calculer une primitive de $x \mapsto \sin(2x)$
3. Calculer la dérivée de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \cos^2(x)$.
4. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\cos x + 1 = 2\cos^2 \frac{x}{2}$
5. Une voiture de longueur l part en marche arrière à une vitesse v. On note A_0 la position initiale de l'arrière. A quel moment l'avant passe en un point A_1 tel que $A_1A_0 = d$?
6. Un satellite va à la vitesse de 1u.a./an. Donner sa vitesse en km/h sachant que $1u.a. = 149,6.10^9 m$, et une année 365,25 jours.

Mercredi

1. Mettre sous forme algébrique $(1+i)^2$
2. Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)dx$
3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto x(t)^2$, où x est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Calculer la dérivée de f.
4. Soit $a \in \mathbb{R}$. Que vaut $\sin(2a)$ en fonction de $\cos(a)$ et $\sin(a)$?
5. Rappeler (il faut les connaître par cœur) les masses molaires de H, N, C et O.
6. On considère l'espace paramétré par les coordonnées x, y et z. Quelle est la fraction de l'espace correspondant à $(x, y, z) \in \mathbb{R}_+^3$?

Jeudi

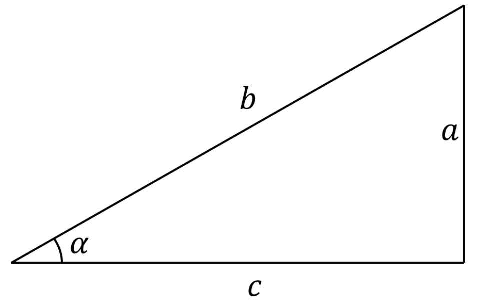
1. Donner un argument et le module de i^{2018}.
2. Calculer $\int_{-2018}^{2018} \frac{dx}{2}$ par un calcul d'aire.
3. Tracer sans faire d'étude et sans calculatrice la courbe représentative de la fonction $\mathbb{R}^* \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x}$.
4. Que vaut $\cos(\pi + x)$?
5. Que vaut $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{e}$ dans la figure ci-dessous, si $AB = a$ et $||\overrightarrow{e}|| = 1$?



6. On définit 1To (Teraoctet) comme 1To=2^{40}o. Évaluer l'erreur relative que l'on comment si on dit que 1To$\approx 10^{12}$o.

Vendredi

1. Soit $z = 8 + 13i$. Que valent la partie réelle et la partie imaginaire de $ze^{i\pi}$?
2. Calculer $\displaystyle\int_0^1 (2x^2 + 5x - 3)dx$
3. Soit la fonction $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f \mapsto f^{2018}$. Calculer la dérivée de x.
4. Une grandeur augmente de 3%, puis diminue de 5%. Est ce que cela revient au même que si elle avant diminué de 5%, puis augmenté de 3% ?
5. Dans le triangle rectangle ci-dessous, que vaut $\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)$?
6. La pression atmosphérique vaut 1 atm. Calculer la force $F = P.S$, en Newton, qu'exerce l'atmosphère sur un écran format 4/3 de 32 pouces de diagonale. On donne 1atm $= 1,013.10^5$Pa et 1 pouce=2,54cm.



Samedi

1. Donner un argument et le module de $i^{\frac{1}{2}}$
2. Calculer $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^2}dx$
3. Tracer l'allure sur $\mathbb{R}_+^*$ de $f : r \mapsto \frac{1}{r^2} - \frac{K}{r}$, avec $K \in \mathbb{R}_+^*$
4. Que vaut $\cos(\frac{\pi}{2} - x)$?
5. On regarde la mer depuis une altitude de 50m. Quelle est la distance de l'horizon (on donne le rayon de la Terre $R_T = 6370$km) ?
6. Donner le rapport entre le volume d'un cube de côté a et sa surface. En déduire pourquoi, à climat égal, plus un animal est grand, et moins il a besoin d'avoir des poils.

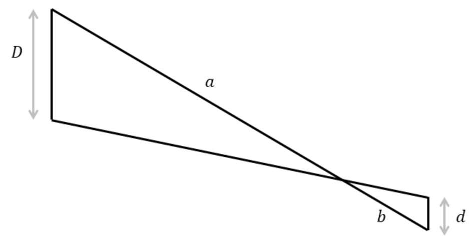
—Semaine 2 —

Lundi

1. Quel est le module et un argument de $2022 + 2022i$?
2. Donner une primitive sur $]-\infty; 3[$ de $f : \theta \mapsto \frac{1}{\theta - 3}$
3. Tracer sans calculatrice la courbe représentative de $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto (x+1)^2$
4. Soit $x \in \mathbb{R}$. Simplifier $\sin(2x)(2\cos^2(x) - 1)$
5. A quoi correspond la grandeur $2\pi r$? Que retrouve-t-on si on calcule $\int_0^R 2\pi r dr$?
6. On sait que la période de révolution de la Terre T est reliée à sa distance moyenne au soleil a par $T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GM_S}$, où $G = 6,674.10^{-11} m^3 kg^{-1}.s^{-2}$ et $a = 149,6.10^6 km$. En déduire la valeur numérique de M_S.

Mardi

1. Donner la forme trigonométrique (module et un argument) de $z = 1 + i$
2. Calculer $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{2x} dx$
3. Calculer la dérivée de : $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{2x+1}$
4. Soit $a \in \mathbb{R}$. Que vaut $\cos(2a)$ en fonction de $\cos(a)$ et $\sin(a)$?
5. Rappeler le nom et la valeur des préfixes p., n., μ., m.,k.,M.,G.,T. (à connaître par cœur).
6. Donner l'expression de d en fonction de a, b et D dans le schéma suivant :

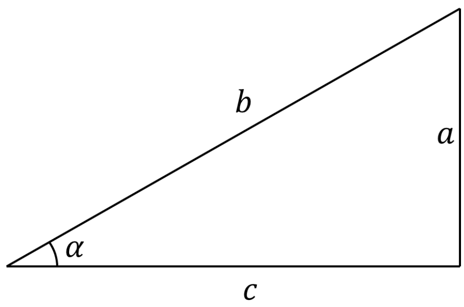


Mercredi

1. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. En donner un argument.
2. Que vaut $\int_0^{2\pi} \cos(\theta) d\theta$?
3. Soit $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R},\ t \mapsto t^{\frac{3}{5}}$. Quelle est la limite de g quand t tend vers 0 ?
4. Que vaut $\sin(x + 2022\pi)$?
5. Que vaut le volume d'un cône de hauteur h et dont le diamètre de la base vaut d ?
6. On a la relation suivante $\rho = \frac{4M}{N_A a^3}$. Calculer a en pm si $\rho = 4,7 \text{tonnes/m}^3$, $M = 57 \text{g/mol}$ et $N_A = 6,02.10^{23} \text{mol}^{-1}$

Jeudi

1. Donner la forme trigonométrique (module et un argument) de $\dfrac{1+i}{1-i}$
2. Donner une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de $f : x \mapsto \frac{1}{x^{-2}}$
3. Soit $k \in \mathbb{R}^+$. Déterminer graphiquement le nombre de solutions de $x = k \sin x$, d'inconnue x, sur $[-\pi, \pi[$.
4. Dans le triangle rectangle ci-dessous, que vaut $\frac{1}{\tan \alpha}$?



5. Si le J (joule) est l'unité standard de l'énergie, expliquer pourquoi $\mathrm{J} = \mathrm{kg.m^2.s^{-2}}$ et $\mathrm{J} = \mathrm{N.m}$.
6. Quelle est la période de $x \mapsto \cos(2x)$?

Vendredi

1. Mettre sous forme algébrique (partie réelle et imaginaire) $z = \dfrac{5+i}{1-2i}$
2. Calculer $\displaystyle\int_0^1 e^{2x} dx$
3. Simplifier pour $x > 0$: $f(x) = \ln(\sqrt{x}) - \ln(\dfrac{1}{x^2})$
4. Soit $x \in \mathbb{R}$. Simplifier $\cos(x + 17\pi)$ et $\sin(x + 17\pi)$
5. Un octet est un chaîne de caractère composée de huit 0 ou 1, par exemple $\boxed{0}\boxed{1}\boxed{1}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{1}\boxed{0}\boxed{1}$. Donner le nombre d'octets différents possibles.
6. Donner une équation de la tangente en 0 de la courbe représentative de la fonction exponentielle.

Samedi

1. Soit x imaginaire pur non nul. En donner un argument.
2. Donner une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de $f : x \mapsto \frac{1}{x^{2022}}$
3. Tracer sans faire d'étude et sans calculatrice la courbe représentative de $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 5x^2$
4. Combien de solutions a $\cos x = \frac{1}{2022}$ sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$?
5. Donner la longueur d'un arc de cercle délimitant un angle de $\frac{\pi}{6}$.
6. Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $x - 1 - \ln(x) \geq 0$

—Semaine 3 —

Lundi

1. Donner la forme trigonométrique (module et un argument) de $z = -2$
2. Donner une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de $f : x \mapsto \frac{1}{x^7}$
3. Calculer la dérivée de : $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^{3x+7}$
4. Que valent $\cos(\dfrac{\pi}{2})$, $\sin(\dfrac{\pi}{2})$, $\cos(0)$, $\sin(0)$, $\sin(\pi)$ et $\cos(\pi)$?
5. Donner une équation de la tangente en 0 de la courbe représentative de sinus. Même question avec la courbe de cosinus.
6. On place dans un cube une boule de telle sorte que chaque face du cube soit tangent à la sphère. Déterminer le pourcentage du volume du cube occupé par la sphère.

Mardi

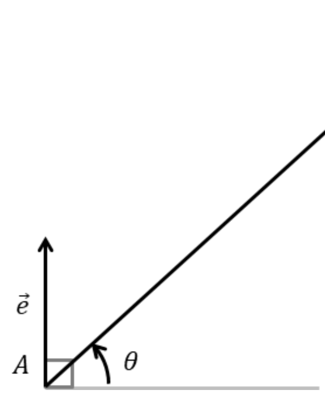
1. Soient a, $b \in \mathbb{R}$. Que vaut le module de $z = \dfrac{a+ib}{a-ib}$?
2. Donner une primitive sur $\left]-\infty; \frac{4}{3}\right[$ de $h : a \mapsto \frac{1}{(3a-4)^4}$
3. Tracer sans faire d'étude et sans calculatrice la courbe représentative de la fonction de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto (x-4)^2$
4. Combien de solutions a $\cos x = \frac{1}{218}$ sur $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$? Et $\cos x = 218$?
5. La vitesse d'un satellite sur son orbite circulaire est donnée par $v = \sqrt{\frac{g_0 R_T^2}{R_T + z}}$, où z est l'altitude, $R_T = 6370$km le rayon de la Terre, $g_0 = 9,81$m.s^{-1} l'accélération de la pesanteur. Si un satellite fait un tour en 91 minutes, donner son altitude.
6. Ecrire en fonction d'une puissance de 10 le plus grand nombre à 8 chiffres. En déduire le plus grand nombre à 8 chiffres en base 2.

Mercredi

1. Soit $z = 1 + 2i - a$ avec $a \in \mathbb{R}$. A-t-on :
   (a) $|z|^2 = 5 - a^2$
   (b) $|z|^2 = 5 + a^2$
   (c) $|z|^2 = (1-a)^2 + 4$
   (d) $|z|^2 = (1-a)^2 + 4 + 4(1-a)$
2. Donner une primitive sur $\mathbb{R}_+$ de $f : x \mapsto \sqrt{x+4}$
3. Soit $w : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R},\ y \mapsto y^{-3}$. Quelle est la limite de w quand y tend vers 0 ?
4. Que vaut $\cos \frac{2\pi}{3}$?
5. Résoudre le système d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{R}^2$: $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$
6. Quelle est la période de $t \mapsto \cos(\omega t)$?

Jeudi

1. Que vaut $e^{2022i\pi}$?
2. Donner une primitive sur $\mathbb{R}_+$ de $k : x \mapsto 4^x$
3. Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{5x+98}$
4. Que vaut $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{e}$ dans la figure ci-dessous, si $AB = a$ et $||\overrightarrow{e}|| = 1$?



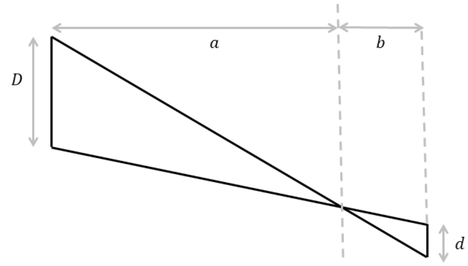
5. Soit $x \in \mathbb{R}$. Simplifier $\cos^2(12x) + \sin^2(12x)$ puis $\cos^2(12x) + \cos^2(12x + \frac{\pi}{2})$
6. l'espace interstellaire froid est caractérisé par une densité de 25 atomes/cm^3 d'hydrogène. Calculer la masse d'une année lumière cube. On donne la vitesse de la lumière $C = 3.10^8$m/s et $N_A = 6.10^{23}$mol^{-1}.

Vendredi

1. Simplifier $e^{i\pi} + e^{-i\pi}$
2. Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2(x)dx$
3. Tracer sans faire d'étude et sans calculatrice la courbe représentative de la fonction de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto e^{-x-1}$
4. Soit $a \in \mathbb{R}$. Donner le nombre de solutions de l'équation d'inconnue $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$: $\cos x = a$.
5. Expliquer pourquoi la somme de deux fonctions croissantes est croissante. Est-ce vrai pour deux fonctions monotones ?
6. Soit un triangle ABC et son cercle circonscrit de diamètre BC. Montrer en raisonnant uniquement sur les angles (ni besoin de Pythagore ou Al-kashi) que le triangle est rectangle en A.

Samedi

1. Donner la forme trigonométrique (module et un argument) de $z = 67i$
2. Donner une primitive sur $\mathbb{R}$ de $\theta : t \mapsto (4t)^7$
3. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^a$, avec $a \in \mathbb{R}_-^*$. Quelle est la limite de f quand x tend vers $+\infty$?
4. Que vaut $\cos(4\pi + x)$?

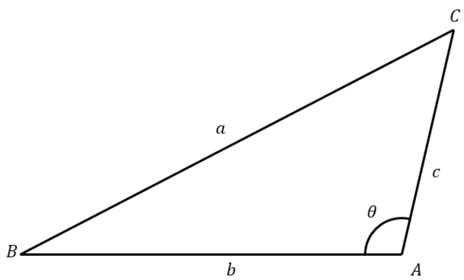


5. Donner l'expression de d en fonction de a, b et D dans le schéma suivant :
6. *(Sans calculatrice)* J'ai commandé une mole (10^{24}) de sucres cubiques de 1cm de côté chacun. Quelle sera la hauteur du stock si je les dispose sur un hectare (=10.000m^2) ?

—Semaine 4 —

Lundi

1. Simplifier $\dfrac{e^{i\pi}}{e^{i\frac{\pi}{2}}}$
2. Calculer $\displaystyle\int_1^2 \left(\frac{1}{x+1}+6\right)dx$
3. Calculer la dérivée de : $\mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \ln(5x)$
4. Simplifier $\cos(\pi) + i\sin(3\pi)$ et $\cos(\dfrac{\pi}{2}) - i\sin(\dfrac{\pi}{2})$
5. Démontrer à l'aide du produit scalaire que $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\theta)$



6. Le débit de la Seine est de 328m^3/s. Le donner en tonnes/jour.

Mardi

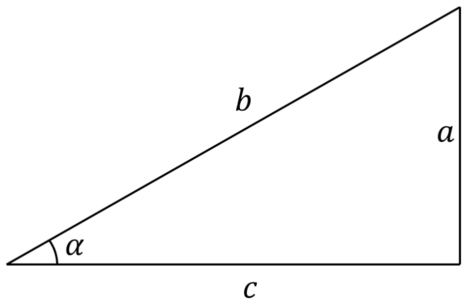
1. Que vaut $e^{in\pi}$, avec $n \in \mathbb{N}$?
2. Donner une primitive sur $\mathbb{R}$ de $t : u \mapsto (4u - 213)^{71}$.
3. Tracer sans faire d'étude et sans calculatrice la courbe représentative de la fonction de $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, x \mapsto -\ln x$
4. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto \cos\left(\frac{2\pi}{43}x\right)$, que vaut $f(x+86)$?
5. Expliquer pourquoi $\int_0^5 (e^{-x^2} - 1)dx = -3$ ne peut pas être vrai.
6. L'éclairement moyen du soleil en France est d'environ 1500 kW.h/m^2/an. Donner la puissance moyenne reçue par un toit de 12m^2.

Mercredi

1. Donner la forme trigonométrique (module et un argument) de $\dfrac{150}{i}$
2. Calculer $\displaystyle\int_0^1 (2x-1)^2 dx$
3. Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ $f : t \mapsto e^{-\frac{t}{\tau}}$. Que vaut t_0 tel que $f(t_0) = \frac{1}{e^3}$?
4. Que vaut $\sin(2022\pi + x)$?
5. A quoi correspond la grandeur $4\pi r^2$? Que retrouve-t-on si on calcule $\int_0^R 4\pi r^2 dr$?
6. Illustrer à l'aide d'un triangle rectangle pourquoi $\lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \tan\theta = \infty$

Jeudi

1. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Donner la forme trigonométrique (module et un argument) de a, de ia et de $a + ia$.
2. Donner une primitive sur $[50, +\infty[$ de $g : x \mapsto (\frac{x}{2} - 23)^\pi$.
3. Calculer $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x}$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x}$ puis $\lim\limits_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}}$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x}}$
4. Donner de tête les valeurs de $\cos(\dfrac{7\pi}{2})$ et $\sin(\dfrac{7\pi}{2})$
5. A l'aide du triangle rectangle ci-dessous, retrouver $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$.



6. Soit f une fonction impaire continue sur $\mathbb{R}$. Expliquer pourquoi $\forall a \in \mathbb{R}^+$, $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

Vendredi

1. Soit $A \in \mathbb{R}$ et $\phi \in \mathbb{R}$. Donner le module et un argument de $Ae^{i\phi}$.
2. Calculer une primitive de $x \mapsto \cos(3x + 5)$
3. Donner une équation de la tangente en (0,1) de la courbe représentative de la fonction $\mathbb{R}_+ \to R_+,\ x \mapsto e^{-x}$.
4. A quelle(s) condition(s) sur $a \in \mathbb{R}$ l'équation d'inconnue x, $\sin^2 x = a$ a une solution ?
5. Résoudre le système d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{R}^2$: $\begin{cases} x + y = 3 \\ 5x - 5y = 15 \end{cases}$
6. Choisir parmi les deux résultats suivants celui qui est correct :
   (a) $\int_0^\pi \sin\theta d\theta = 2$
   (b) $\int_0^\pi \sin\theta d\theta = -2$

Samedi

1. Soit a un entier. Donner la valeur de $i^a + i^{a+1} + i^{a+2} + i^{a+3}$
2. Calculer $\displaystyle\int_0^1 (x-1)^2 dx$
3. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ $g : u \mapsto (\frac{u}{a} - 3)^2$. Que vaut u_0 tel que $g(u_0) = 25$?
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Que vaut $\sin(2n\pi + x)$?
5. A quel angle correspond un quart de tour ?
6. On considère la fonction $f : t \mapsto \cos(\omega t)$ et $T = \frac{2\pi}{\omega}$, avec $\omega \in \mathbb{R}_+^*$. f est-elle :
   - T-périodique ?

- $2T$-périodique ?
- $\frac{T}{2}$ périodique ?

—Semaine 5 —

Lundi

1. Soient $a,\ b > 0$. Donner la forme trigonométrique (module et un argument) de $\dfrac{a}{b}$, de $\dfrac{a}{ib}$ et de $\dfrac{ia}{b}$
2. Que vaut $\int_0^\pi \sin(f)df$?
3. Tracer sans faire d'étude et sans calculatrice la courbe représentative de la fonction de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 3\cos x$
4. Donner de tête les valeurs de $\cos(\dfrac{\pi}{6})$ et $\sin(\dfrac{3\pi}{4})$
5. Donner la surface d'une sphère de rayon x.
6. Donner la vitesse de déplacement en km/h d'un point situé à la latitude $\lambda = 48°$ dans le référentiel géocentrique (on rappelle que la Terre tourne sur elle-même en 23h56m et que son rayon vaut $R_T = 6370$km

---

Mardi

1. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z)$ et $\mathrm{Re}(z) < 0$. Quel est le module de z ?
2. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Que vaut $\int_0^a \cos\left(\frac{2\pi t}{a}\right) dt$?
3. Calculer la dérivée de : $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sin(2x+5)$
4. Trouver $x \in]-\pi, \pi]$ tel que $\sin(x) = \dfrac{-1}{2}$
5. Donner la longueur d'un arc de cercle de rayon R délimitant un angle de 45°.
6. La loi de Kepler pour une orbite circulaire de rayon R dit $T^2 = kR^3$, avec k indépendant de l'astre en rotation. Montrer que plus on s'éloigne du soleil, plus la vitesse angulaire est faible, mais que la vitesse décroît plus lentement.

Mercredi

1. Simplifier $e^{i32\pi} + e^{i35\pi}$
2. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{3x+1}^8 dx$
3. Tracer sans faire d'étude et sans calculatrice la courbe représentative de la fonction de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto (x+5)^3$
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Que vaut $\cos(n\pi + x)$?
5. Donner sans dérivation le sens de variation sur $\mathbb{R}^+$ de $x \mapsto \frac{x}{2+x}$
6. En cartésiens un vecteur $\overrightarrow{u}$ s'écrit $\overrightarrow{u} = u_x\overrightarrow{e_x} + u_y\overrightarrow{e_y} + u_z\overrightarrow{e_z}$. Exprimer $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{e_y}$.

Jeudi

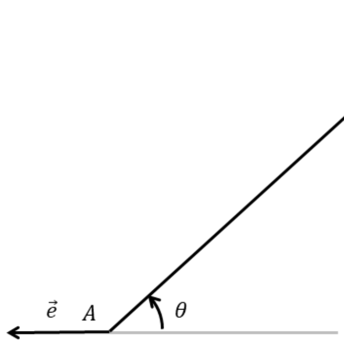
1. Mettre sous forme algébrique $(3+2i)(4-i)$
2. Soit $x \in \mathbb{R}$.Que vaut $\int_0^{2\pi} \cos(x)\, d\theta$?
3. Simplifier avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ $\frac{e^a+e^b}{e^{ab}}$
4. Donner une période de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \cos\left(\frac{2\pi}{2022}x\right)$?
5. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que $\cos a + \cos b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$
6. Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation d'inconnues x et y : $412x + 14y = 204713$.

Vendredi

1. Déterminer un argument de $(-417-417i)^{20}$?
2. Calculer $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{x}dx$
3. Calculer la dérivée de : $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2\cos(5x+1)$
4. Trouver $x \in]-\pi,\pi]$ tel que $\cos(x) = \dfrac{1}{2}$
5. Donner une équation de la droite passant par $(0;1)$ et de coefficient directeur 2.
6. Donner la longueur d'un arc de cercle de rayon R délimitant un angle de α.

Samedi

1. Soit $z = 2i + 4 - ix$, $x \in \mathbb{R}$. Calculer $|z|$
2. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x+1}dx$
3. Calculer la dérivée de : $\mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x\ln(x)$
4. Calculer de tête $\cos(\dfrac{4\pi}{3})$ et $\sin(\dfrac{5\pi}{6})$.
5. Donner la surface d'une "part de tarte" de rayon R délimitant un angle de α, avec $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
6. Que vaut $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{e}$ dans la figure ci-dessous, si $AB = a$ et $||\overrightarrow{e}|| = 1$?



—Semaine 6 —

Lundi

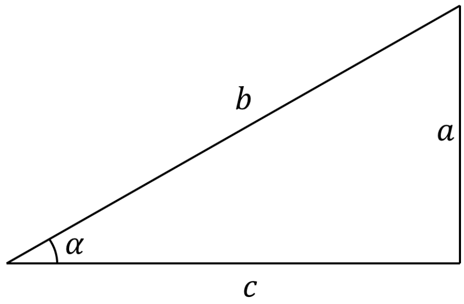
1. Quel est un argument de $\frac{1}{2022-2022i}$?
2. Soit $a \in \mathbb{R}$. Que vaut $\int_{-3}^{7} a dx$?
3. Calculer la dérivée de : $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \ln(1+e^x)$
4. Montrer que $\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} = \left|\cos\frac{\theta}{2}\right|$
5. Que vaut l'aire d'un disque de rayon a ?
6. Un phare a une hauteur de 70m. Quelle est la distance à laquelle on peut le voir si on est à 10m au-dessus de l'eau ? On donne le rayon de la Terre $R_T = 6370\text{km}$

Mardi

1. Soit $z = 5i + 5 + ix$, x imaginaire pur. Calculer $|z|$.
2. Soit $a \in \mathbb{R}$. Donner une primitive de $f : x \mapsto \cos(a)$.
3. Simplifier pour $x > 0$: $f(x) = \ln(2x) - \ln(x^3) + \ln(\dfrac{x}{2})$
4. Soit $a \in \mathbb{R}$ Montrer que lorsque c'est bien défini : $\tan(2a) = \dfrac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)}$
5. Soit $x \in \mathbb{R}$. Simplifier : $(\cos(2x) + i\sin(2x))^2$
6. On considère la fonction $f : t \mapsto \cos(2\omega t)$ et $T = \frac{2\pi}{\omega}$, avec $\omega \in \mathbb{R}_+^*$. f est-elle :
   - T-périodique ?
   - $2T$-périodique ?
   - $\frac{T}{2}$ périodique ?

Mercredi

1. Soit $z = 2022 + a.i$. A-t-on $|z| = 0$ si $a = 2022$?
2. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2x+5} dx$
3. Calculer la dérivée de : $\mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \ln(\ln(x))$
4. Donner une période de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sin\left(\frac{2\pi x + 730}{365}\right)$?
5. A l'aide du triangle rectangle ci-dessous, retrouver que $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[,\ \cos x < 1$.
6. Soit $x \in \mathbb{R}$. L'équation $\cos x - 1 = e^{-x}$ a-t-elle une solution ?



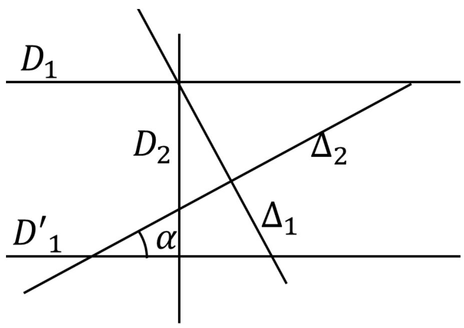
Jeudi

1. Simplifier $e^{i\pi}$
2. Calculer $\int_3^7 (5x+4)dx$ par un calcul d'aire.
3. Tracer sans faire d'étude et sans calculatrice la courbe représentative de la fonction de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto -2x^2$
4. Résoudre $(x+3)^2 = 25$, d'inconnue x réelle.
5. A quel angle correspond un demi-tour en radians ?
6. Donner le volume d'un cylindre droit de base de rayon R et de hauteur h

---

Vendredi

1. Soit $z = 3 + 17i$. Que valent la partie réelle et la partie imaginaire de $ze^{i\frac{\pi}{2}}$?
2. Calculer $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$
3. Simplifier pour $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = \dfrac{e^{3x}}{(e^{-x})^2}$
4. Simplifier : $\sin^2(\dfrac{\pi}{6}) + \cos^2(\dfrac{5\pi}{6})$
5. Trouver tous les angles égaux à α sur le dessin suivant. Les droites D_1 et D_2 sont orthogonales, ainsi que les droites Δ_1 et Δ_2. Les droites D_1 et D'_1 sont parallèles.



6. Soient $a,\ b \in \mathbb{R}$ Montrer que : $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$

Samedi

On appelle barycentre G d'un ensemble de n points pondérés (M_i, m_i) le point tel que $\sum_{i=1}^n m_i\overrightarrow{GM_i} = \overrightarrow{0}$, à condition que $\sum_{i=1}^n m_i \neq 0$. En physique, les m_i correspondent souvent à des masses. On appelle isobarycentre le point G_0 tel que $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $m_i = m_j$.

Les trois dernières questions de ce cahier de vacances sont consacrées à cette notion, et sont plus longues que les autres : profitez du temps qu'il reste pour les traiter.

P.S. : ces trois questions servent de test très discret (?) pour savoir qui est allé.e jusqu'au bout du cahier de vacances (oui, je sais, c'est mesquin...)

1. Soit $z = \frac{5}{2} + 5\frac{\sqrt{3}}{2}i$. Que vaut un argument de z^{-3} ?
2. Donner une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de $v : y \mapsto y^{\frac{1}{47}}$
3. Vérifier que $\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}$ puis en déduire $\cos(\dfrac{\pi}{12})$
4. Montrer que :
   (a) si les m_i sont positifs, alors le barycentre de M_1, m_1 et M_1, m_2 est sur le segment $[M_1M_2]$.
   (b) si les m_i sont positifs, alors le barycentre de M_1, m_1 et M_1, m_2 est plus proche du point le plus lourd.
   (c) l'isobarycentre de A et B est le milieu de $[AB]$.
   (d) l'isobarycentre de A, B et C et tel que $\overrightarrow{AG_0} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$, où I est le milieu de $[AB]$.
5. Si G désigne le barycentre des (M_i, m_i), alors pour un point quelconque O,

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i\overrightarrow{OM_i}}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

6. Montrer que si on appelle G_A le barycentre des n points pondérés $(A_i, m_{A,i})$, $i \in [\![1,n]\!]$ et G_B le barycentre des p points pondérés $(B_j, m_{B,j})$, $j \in [\![1,p]\!]$, alors le barycentre G des points $(A_i, m_{A,i}) \bigcup (B_i, m_{B,i})$ est le même que celui de $(G_A, \sum_{i=1}^n m_{A,i})$ et de $(G_B, \sum_{j=1}^p m_{B,j})$