Physique-Chimie : cahier de vacances - semaine 45, corrigé

— Semaine 5 —

Lundi

I **I.1** Tout est nul avant fermeture de l'interrupteur (cf. préambule), et la tension aux bornes de C est continue : $u(0) = 0$

I.2 En régime continu, la bobine se comporte comme un fil est le condensateur comme un interrupteur ouvert. On a alors :

$$u_\infty = \frac{R}{R+r}e \quad ; \quad i_{L,\infty} = \frac{e}{R+r}$$

On en déduit :

$$W_C = \frac{CR^2}{2(R+r)^2}e^2 \quad ; \quad W_L = \frac{Le^2}{(R+r)^2}$$

II Il faut dépasser la résolution angulaire humaine, soit avoir en sortie un angle $\alpha' > 1'$. Or on a $G = \frac{f_{obj}}{f_{oc}}$ et $\alpha = \frac{d}{D}$ avec d la taille de la division et D la distance. Ceci mène à $\alpha' = G\alpha = \frac{f_{obj}}{f_{oc}}\frac{d}{D} > 1'$ soit :

$$f_{oc} < \frac{f_{obj}}{1'}\frac{d}{D} = 17\text{mm}$$

Il faut que l'oculaire ait une distance focale qui soit au maximum de 17mm.

III On lâche un cylindre sur un plan incliné faisant un angle $\alpha = 25°$ avec l'horizontale. Le cylindre roule alors sans glissement (i.e.comme une roue de voiture) sur le plan incliné. On note G son centre de gravité, $a = 30$cm son rayon, M sa masse et ω sa vitesse de rotation. On donne $I = \frac{1}{2}Ma^2$ pour le moment d'inertie du cylindre autour de son axe.

III.1 La distance parcourue par le point de contact doit être égale à celle parcourue par le centre de gravité (parallèle à la route). Ceci mène à $a\omega = v_G$

III.2 L'énergie cinétique totale vaut $E_C = \frac{1}{2}Mv_G^2 + \frac{1}{4}Ma^2\omega^2 = \frac{3}{4}Ma^2\omega^2$

III.3 Il suffit d'appliquer le théorème de l'énergie cinétique (en supposant que la vitesse initiale est nulle) :

$$\frac{3}{4}Ma^2\omega^2 = Mgh$$

où Mgh est le travail du poids, avec $h = d\sin\alpha$, soit :

$$\omega = \sqrt{\frac{4gd\sin\alpha}{3a^2}} = 26,9\text{rd/s}$$

IV **IV.1** En raison de la linéarité du filtre, si on a une somme de tensions sinusoïdales en entrée, on aura une somme de tensions sinusoïdales en sortie, aux mêmes fréquences (ceci provient du théorème de superposition des équations différentielles linéaires).

IV.2 On a manifestement à f_1, $G = -12$dB, soit un facteur 4 (-3dB correspond à un facteur $\frac{1}{\sqrt{2}}$). Pour φ_1, on aura 0 si ce filtre est un passe-bas d'ordre 1 standard. Ceci correspond à $\varphi_1 = 0$ et $S_1 = \frac{E}{4}$

IV.3 Il faut que l'on soit à -40dB de l'asymptote en 0, soit au-dessus de 2.10^5Hz

IV.4 Avec un filtre d'ordre 2, il suffirait d'une décade pour atteindre -40dB, et non deux comme c'est le cas ici avec un ordre 1.

V On va procéder pas à pas. On appelle M_1 le miroir immédiatement situé en face du client, M_2 l'autre. On note $x = 0$ pour M_1, $x_0 = -1$m pour le client et $x' = -5$m pour le second miroir. On appelle x_n la position de l'image A_n.

On a presque évidemment $x_1 = 1$m. A_1 est alors à 6m du miroir 2, donc A_2 est à 6m en aval du miroir M_2, soit $x_2 = -11$m ; A_2 est alors à 16m du miroir M_1, donc $x_3 = 16$m. On retrouve alors :

- $x_1 = 1$m
- $x_2 = -11$m
- $x_3 = 16$m
- $x_4 = -26$m
- $x_5 = 31$m
- $x_6 = -41$m

On a donc $x_n = \left(1 + \frac{15n}{2}\right)$ m si n est pair et $x_n = -\left(11 + \frac{n-1}{2}15\right)$ m si n est impair

Mardi - S5

I On va calculer numériquement :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 5,345.10^4\text{rd/s} \quad ; \quad Q = \frac{1}{R+r}\sqrt{\frac{L}{C}} = 0,267$$

On a donc nettement un régime apériodique. On peut alors calculer $\omega = \omega_0\sqrt{\frac{1}{4Q^2}-1} = 0,4\omega_0 = 2,138.10^4\text{rd/s}$ et écrire :

$$i = 3\text{A} + e^{-\frac{\omega_0}{Q}t}\left[A\cosh(\omega t) + B\sinh(\omega t)\right]$$

On voit alors que $A = -3\text{A}$, et que $B = \frac{\omega_0 A}{Q\omega} = \frac{A}{0,4Q}$ donc :

$$i = 3\text{A}\left[1 - e^{-\frac{\omega_0}{Q}t}\left(\cosh(\omega t) + \frac{1}{0,4Q}\sinh(\omega t)\right)\right]$$

II Un cycle de Stirling pour un gaz parfait est constitué de deux isothermes à T_1 et T_2 et deux isochores à $V_{1,m}$ et $V_{2,m}$ (on considère que les grandeurs indicées 2 sont toujours plus grandes que celles indicées 1). On pose $a = \frac{V_{2,m}}{V_{1,m}}$.

II.1 On trouve deux branches d'hyperboles reliées par deux verticales, tournant dans le sens des aiguilles d'une montre vu la question 3

II.2 On sait que $\rho_c = 1 - \frac{T_1}{T_2}$

II.3 On a $\rho = -\frac{W_{cycle}}{Q_c}$

Le travail est nul sur les isochores, ce qui permet de trouver $W_{cycle} = nR\ln\frac{V_2}{V_1}(T_1 - T_2)$ (on utilise le fait que $W = -\int pdV = -\int \frac{nRTdV}{V} = -nRT\ln\frac{V_f}{V_i}$)

L'échange thermique avec la source chaude se fait durant l'échauffement isochore et l'isotherme à T_2 donc :

$$Q_c = n\frac{R}{\gamma-1}(T_2 - T_1) + nRT_2\ln\frac{V_2}{V_1}$$

ce qui permet d'écrire :

$$\rho = \frac{\ln a(T_2 - T_1)}{\frac{T_2 - T_1}{\gamma-1} + T_2\ln a}$$

Or $T_2 - T_1 = T_2\rho_c$, donc :

$$\rho = \frac{\rho_c T_2\ln a}{\frac{\rho_c}{\gamma-1}T_2 + T_2\ln a} = \frac{\rho_c\ln a}{\frac{\rho_c}{\gamma-1} + \ln a}$$

II.4 Si on réécrit $\rho = \rho_c\frac{1}{1+\frac{\rho_c}{(\gamma-1)\ln a}}$, on voit immédiatement que $\rho < \rho_c$; ceci est dû au caractère irréversible des isochores (qui sont nécessairement non adaptées).

III On a manifestement un passe-haut d'ordre 1 (pente de +20dB/décade), avec $H_{max} = \frac{1}{2}$ ($G_{max} \approx -6$dB), et une pulsation de coupure $\omega_c = 3.10^4$rd/s

IV Il suffit d'utiliser la relation de conjugaison au centre :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = V$$

ce qui mène à :

$$\overline{OA} = \frac{1}{\frac{1}{\overline{OA'}} - V} = -30\text{cm}$$

V Un considère deux circuits, l'un dit primaire où une bobine de résistance interne négligeable et d'inductance propre L_1 est alimentée par un générateur sinusoïdal de f.e.m. $e(t) = E_0 \cos \omega t$, avec $E_0 = 220\text{V}$ et ω telle que la fréquence vaille 50Hz, l'autre dit secondaire, constitué d'une bobine d'inductance propre L_2, de résistance interne négligeable et d'une résistance $R_0 = 100\Omega$. On mesure la tension aux bornes de R_0.

Les deux circuits sont en influence mutuelle via un coefficient M.

V.1 C'est une simple application numérique : $L_2 < \frac{R_0}{10\omega} = 32\text{mH}$

Ceci est plutôt raisonnable, en tout cas tout à fait atteignable par une bobine usuelle.

V.2 Le circuit secondaire va donc être constitué, en formalisme complexe :

- d'un générateur $-j\omega M \underline{i}_1$
- d'une bobine d'impédance $jL_2\omega$
- d'une résistance d'impédance R_0

Si la condition précédente est vérifiée, ceci signifie que que $\underline{i}_2 = \frac{-jM\omega\underline{i}_1}{R_0}$. Or on a $jL_1\omega\underline{i}_1 = E_0$ donc :

$$\underline{i}_2 = -\frac{M}{L_1 R_0} E_0$$

Or la puissance s'écrit :

$$P = \frac{R_0}{2} \frac{M^2}{L_1^2 R_0^2} E_0^2$$

ce qui mène à :

$$\frac{M}{L_1} = \sqrt{\frac{2PR_0}{E_0^2}} = 0,35$$

Mercredi - S5

I On peut évaluer :

- la quantité de dioxygène présente dans l'atmopshère : $n_a = \frac{P_{atm}V_{atm}}{RT} * 0,2$ car le dioxygène occupe 20% de l'atmospère
- la quantité de dioxygène dans l'eau : $n_e = [\mathrm{O_2}]V_e = KP_{O_2,atm}V_e$

Tout est alors affaire d'évaluation numérique. On connait $T = 300\mathrm{K}$, $P_{atm} = 10^5\mathrm{Pa}$ et $V_{atm} = 4\pi R_T^2 e_{atm} = 2.10^{17}\mathrm{m}^3$, donc $n_a = 8.10^{18}\mathrm{mol}$

Pour l'océan, on a $V_e = 2,5.10^{16}\mathrm{m}^3$, $P_{O_2,atm} = 2.10^4\mathrm{Pa}$ donc $n_e = 6,48.10^{17}\mathrm{mol}$

On est plutôt sur un facteur 10...

Remarque : si on se dit qu'en fait ce calcul comporte également les O de l'eau, on doit rajouter $n' = n_{\mathrm{H_2O}} = \frac{\rho_e V_e}{M_e} = 1,4.10^{21}$ atomes, soit 7.10^{20} équivalents en dioxygène. On est cette fois très très au-dessus.

II Tout plan contenant $\overrightarrow{e_z}$ et O est un plan de symétrie de la distribution de courant : c'est donc un plan d'antisymétrie pour $\overrightarrow{B}$. Pour tout point P de l'espace (distinct de O), le plan contenant P, O et $\overrightarrow{e_z}$ est d'antisymétrie pour $\overrightarrow{B}$, donc $\overrightarrow{B}(P)$ est orthogonal à ce plan. Par définition, ce plan contient $\overrightarrow{e_r}$ et $\overrightarrow{e_z}$, donc $\overrightarrow{B}(P)$ est selon $\overrightarrow{e_\theta}$.

La distribution de courant est invariante par rotation de n'importe quelle valeur de θ. Ceci implique que la distribution est elle aussi invariante par rotation selon toute valeur de θ, et donc que le module de $\overrightarrow{B}$ l'est aussi.

III **III.1** Il est plus facile de le faire tourner autour de Δ

III.2 L'énergie cinétique s'écrit de manière générique comme $E_c = \frac{1}{2}I\omega^2$ donc à énergie égale, le rapport

$$\frac{\omega'}{\omega} = \sqrt{\frac{I_\Delta}{I_{\Delta'}}}$$

Or $I_{\Delta'} = I_\Delta + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2 = 3I_\Delta$ (théorème de Huygens) donc :

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

IV **IV.1** Vu la proximité des rayons atomiques, on peut légitimement supposer que le contact se fait entre le Fer et le Titane, soit :

$$a\frac{\sqrt{3}}{2} = r_{Fe} + r_{Ti}$$

soit $a = 312\mathrm{pm}$ (on peut vérifier que $2r_{Fe} < a$, ce qui montre que le contact ne peut pas se faire le long de l'arête).

IV.2 Il y a $6 \times \frac{1}{2} = 3$ sites de type B par maille, ainsi que 1 atome de Fer et 1 atomes de Titane, soit une formule :

$$\mathrm{FeTiH_3}$$

V Il faut d'abord trouver l'équation différentielle. On a avec des notations "évidentes" :

$$u + L\frac{di}{dt} + ri = e$$

soit

$$u + L\frac{di_C}{dt} + L\frac{di_R}{dt} + ri_C + ri_R = e$$

ce qui mène à :

$$u + LC\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{L}{R}\frac{du}{dt} + rC\frac{du}{dt} + \frac{r}{R}u = e$$

que l'on peut réorganiser :

$$LC\frac{d^2u}{dt^2} + \left(\frac{L}{R} + rC\right)\frac{du}{dt} + \left(1 + \frac{r}{R}\right)u = e$$

Quel que soit le régime, on a $u(t) = A_1e^{r_1t} + A_2e^{r_2}t + S.P.$ où r_1 et r_2 sont des racines, a priori complexes, du polynôme caractéristique associé à l'équation différentielle. L'exponentiel qui dure "le plus longtemps", i.e. celui qui va imposer son temps caractéristique, est celui correspondant à r_i de partie réelle maximale (cette partie réelle est nécessairement négative, c'est donc la plus petite partie réelle en valeur absolue). On a alors :

$$\tau = \frac{-1}{\max(r_i)}$$

On a alors deux cas :

- soit $\Delta \geq 0$, auquel cas les racines sont réelles. La plus grande des deux est nécessairement $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\tau = \frac{2a}{b-\sqrt{\Delta}}$
- soit $\Delta < 0$: les deux racines sont complexes conjuguées et ont même partie réelle : $\tau = \frac{2a}{b}$

On a donc :

- régime apériodique ou critique : $\tau = \frac{2LC}{\frac{L}{R}+rC-\sqrt{\left(\frac{L}{R}+rC\right)^2-4\left(1+\frac{r}{R}\right)LC}}$
- régime pseudo-périodique : $\tau = \frac{2LC}{\frac{L}{R}+rC}$

Jeudi - S5

I L'enthalpie de changement d'état à 37°C est d'environ $l_v = (2580 - 180)\mathrm{kJ/kg} = 2400\mathrm{J/g}$. Pour dissiper l'énergie solaire reçue en direct, il faut évaporer :

$$\frac{340\mathrm{J/s}}{2400\mathrm{J/g}} = 0,14\mathrm{g/s} = 512\mathrm{g/h}$$

soit 1/2L par heure pour évacuer cela. Ceci semble beaucoup, et ça l'est, car le modèle suppose que l'on absorbe toute l'énergie que le soleil, ce qui est bien évidemment faux.

II **II.1** La taille vaut tout simplement $t = f'\alpha$, où α est le diamètre angulaire (en radians) et f' la distance focale. On trouve $t = 0,87\mathrm{mm}$

La puissance reçue par la lentille est simplement la puissance reçue multipliée par sa surface, soit $P = 340\mathrm{W/m^2} \times \pi(0,05\mathrm{m})^2 = 2,67\mathrm{W}$

II.2 On chauffe uniquement la taille de la tache, soit un volume de : $V = \pi\left(\frac{t}{2}\right)^2 e \approx 9.10^{-11}\mathrm{m}^3$, soit une masse de $m = 6,2.10^{-8}\mathrm{g}$. La température augmente, à partir de 20°C (grosso-modo), selon :

$$T(t) = T_0 + \frac{P}{c.m}t$$

ce qui donne le temps pour atteindre 233°C :

$$\Delta t = \frac{\Delta tcm}{P} = 7,5\mathrm{ms}$$

Ceci est extrêmement rapide, car ceci néglige les processus de rediffusion par le papier, assez élevé (l'absorption est assez faible, finalement).

III HCOOH et $\mathrm{NH_3}$ ont des domaines de prédominance disjoints, donc la réaction va être totale, et de constante $10^{9,2-3,7} = 10^{5,5}$:

$$\mathrm{HCOOH_{(aq)}} + \mathrm{NH_{3,(aq)}} \rightarrow \mathrm{COO^-_{(aq)}} + \mathrm{NH^+_{4,(aq)}}$$

Initialement, on a :

- $[\mathrm{HCOOC}]_0 = 1,66.10^{-1}\mathrm{mol/L}$
- $[\mathrm{NH_3}]_0 = 8,33.10^{-2}\mathrm{mol/L}$

donc l'acide méthanoïque est excès (et sa concentration est le double de celle de l'ammoniaque). A l'équilibre, on a donc $[\mathrm{HCOOC}] = [\mathrm{COO^-}] = 8,33.10^{-2}\mathrm{mol/L}$, donc $pH = 3,7$.

On connaît également $[\mathrm{NH_4^+}] = 8,33.10^{-2}\mathrm{mol/L}$, ce qui permet de calculer :

$$[\mathrm{NH_3}] = \frac{K_A[\mathrm{NH_4^+}]}{10^{-pH}} = 8,35.10^{-8}\mathrm{mol/L}$$

bien évidemment très faible.

IV *(Sans calculatrice)* On applique $P = \frac{E^2}{R} = \frac{(4,5\mathrm{V})^2}{500\Omega} = 40,5\mathrm{mW}$

V *(MPSI*)* Un objet sphérique de rayon $a = 5\mathrm{cm}$ tombe dans le champ gravitationnel supposé uniforme $\overrightarrow{g} = -g\overrightarrow{e_z}$, avec $g = 9,81\mathrm{ms^{-2}}$. Il est soumis à une force de frottement $-\mu v\overrightarrow{v}$, avec $\mu = \frac{1}{2}\rho C_z S$, où S est la surface frontale de l'objet (i.e. la section perpendiculaire à $\overrightarrow{e_z}$), ρ la masse volumique de l'air et $C_z = 0,45$ le coefficient de trainée. On suppose que l'objet a atteint, à une date $t = 0$ sa vitesse limite $\overrightarrow{v} = -v\overrightarrow{e_z}$. L'objet est en acier de capacité calorifique $c = 435\mathrm{J/K/kg}$, de masse volumique $\rho_a = 8\mathrm{kg/L}$ et de température de fusion $\theta = 1400$°C.

V.1 Il s'agit d'utiliser la relation des gaz parfaits, avec $M_{air} = (0,2*32+0,8*28)\text{g/mol} = 28,8\text{g/mol}$, donc :

$$\rho = \frac{m_{air}}{V_{air}} = \frac{PM_{air}}{RT} = 1,18\text{kg/m}^3$$

On calcule alors $\mu = 2,088.10^{-3}\text{N.m}^{-2}\text{s}^2 = 2,088.10^{-3}\text{kg.m}^{-2}$

V.2 La vitesse limite est atteinte quand la somme des forces s'exerçant sur le solide est nulle, soit quand $\mu v^2 = mg$, donc quand :

$$v = \sqrt{\frac{mg}{\mu}} = \sqrt{\frac{4\pi a^3 \rho_a g}{3\mu}} = 140,2\text{m/s}$$

La puissance est donnée par $P = |\overrightarrow{f}.\overrightarrow{v}| = \mu v^3 = 5,764\text{kW}$. Le premier principe mène alors à, au vu de l'énoncé :

$$mc(\theta(t)-\theta_0) = 0,8Pt$$

donc :

$$t_f = \frac{4\pi a^3 \rho c}{3\times 0,8P}\Delta\theta = 545\text{s}$$

ceci est assez grand, quasiment 10minutes, et l'objet sera probablement arrivé au sol avant d'avoir fondu (le saut de Baumgardner, de 40km d'altitude, a duré 9 minutes).

On peut évaluer $v_T = \frac{2\pi d_{TS}}{1\text{an}} = 2,986.10^4\text{m/s}$, et donc $P = \mu v^3 = 5,5.10^{10}\text{W}$, et donc

$$t_f = 5,6.10^{-5}\text{s}$$

ceci va beaucoup beaucoup plus vite, et donne une étoile filante.

Petite remarque : ce temps est en réalité plus long car la rencontre se fait avec une atmosphère beaucoup moins dense. Si on suppose que la haute atmosphère est 1000 fois moins dense, on trouve un μ 1000 fois plus faible, et donc un temps 1000 fois plus long.

Vendredi - S5

I On trouve :

- à basse fréquence : $u(0) = 0$, $i_R(0) = i_C(0) = 0$, $i_L(0) = \frac{E}{r}$
- à haute fréquence : $u(0) = 0$, $i_R(0) = i_L(0) = 0$, $i_C(0) = \frac{E}{r}$

II Pour le fer α, on a un contact tel que $2r_1 = a_1\frac{\sqrt{3}}{2}$, donc $r_1 = 124$pm, et pour le fer β, $2r_2 = a_2\frac{\sqrt{2}}{2}$ donc $r_2 = 126$pm (ces deux valeurs sont très proches, ce qui est normal).

La densité est donnée :

- pour le fer α $\rho_1 = \frac{2*M(Fe)}{a_1^3 N_A} = 7924\text{kg/m}^3$
- pour le fer β $\rho_2 = \frac{4*M(Fe)}{a_2^3 N_A} = 8217\text{kg/m}^3$

III Entre les deux composantes on a un peu plus d'une décade. Comme on veut une atténuation de 100, on soit avoir une pente minimale à -40dB par décade, donc un filtre passe bas d'ordre 2. Il faut que sa fréquence de coupure soit au maximum de 5kHz, et un facteur de qualité pas trop bas (au moins 1) pour que la courbe colle aux asymptotes.

IV **IV.1** La poussée d'Archimède, si le glaçon est totalement immergé, est plus forte que le poids, car $\rho_e > \rho_g$, donc le glaçon flotte. Ceci signifie que $V_i = xV_g$. A l'équilibre, on a :

$$\rho_e x V_g = \rho_g V_g$$

donc :

$$x = \frac{\rho_g}{\rho_e}$$

IV.2 Si on enlève le glaçon, on laisse un "trou" dans l'eau de valeur xV_g. Or quand le glaçon fond, sa masse est conservé, et son volume final V_f est tel que $\rho_e V_f = \rho_g V_g$, soit :

$$V_f = \frac{\rho_g}{\rho_e} V_g = xV_g$$

Autrement dit, le glaçon fondu occupe exactement le volume que sa partie immergée occupait lorsqu'il était solide. On a $h_f = h_0$

V **V.1** On trouve $v = -\frac{1}{3}\frac{dx}{dt} = k[O_3]^\alpha[O_2]^\beta$ (attention x n'est pas l'avancement mais $x = [O_3]$)

V.2 On se rend compte que le dioxygène est dès le départ en très large excès, et que donc $[O_2] \approx y_0$, donc :

$$v = k y_0^\beta x^\alpha$$

V.3 Ceci mène à $\frac{dx}{dt} = -3k_{app}x^\alpha$, donc :

- pour $\alpha = 1$, $\ln x - \ln x_0 = -3k_{app}t$
- pour $\alpha = 2$, $\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} = 3k_{app}t$

V.4 On trace les points de coordonnées $(t_i, \ln x_i)$ et $(t_i, \frac{1}{x_i})$. Seule la deuxième série mène à des points alignés : on a $\alpha = 2$

Si on interpole ces points, on trouve un coefficient directeur de $a = 1,987.10^{-7}\text{v.p.m}^{-1}\text{mn}^{-1}$. Or $a = 3k_{app}$ donc :

$$k_{app} = 6,622.10^{-7}\text{v.p.m}^{-1}\text{mn}^{-1}$$

V.5 Si on reprend la loi démontrée, on a $\frac{2}{x_0} = 3k_{app}t_{1/2}$ donc :

$$t_{1/2} = \frac{2}{3x_0k_{app}} = 1000\text{mn}$$

V.6 La loi de Dalton donne $x_{O_3} = \frac{P_i}{5P_0} = 2.10^{-6} = 2$v.p.m et

V.7 On a bien la bonne proportion en O_2 (2.10^5v.p.m correspondent à 20%), donc k_{app} ne change pas. On trouve donc

$$t_{1/2} = 5.10^6 \text{mn}$$

Ceci semble long, mais correspond à 9,56 années, ce qui est extrêmement court pour l'atmosphère. Il faut impérativement un mécanisme pour contrebalancer cette destruction de l'ozone.