

## Physique-Chimie : cahier de vacances - semaine 2, corrigé

## — Semaine 2 —

## Lundi

**I** Manifestement, on a un circuit d'ordre 1 et  $\omega_c = 2 \cdot 10^4 \text{rd/s}$

On constate également que l'asymptote horizontale est en -6dB, symptôme d'une fonction de transfert tendant vers 1/2 quand  $\omega \rightarrow 0$  (on rappelle que -3dB correspond à une division par  $\sqrt{2}$ ).

Or en continu, le circuit a pour fonction de transfert  $\underline{H}(0) = \frac{R}{r+R}$  (pont diviseur de tension), donc  $\frac{R}{r+R} = \frac{1}{2}$  et  $r = R$ .

Si on fait l'étude dans le cas général, l'association entre  $R$  et  $C$ , mène à  $\underline{Z} = \frac{R}{1+jRC\omega}$ , et donc

$$\underline{H} = \frac{R}{r + jrRC\omega + R}$$

ce qui montre que  $\omega_C = \frac{r+R}{rRC}$ , et donc que  $C = \frac{r+R}{rR\omega_c} = 20 \text{nF}$

**II** On a une adiabatique monobare. On connaît donc le travail :

$$W_m = -P_B(V_{B,m} - V_{A,m})$$

Mais on ne connaît pas  $V_{B,M}$ . On va transformer cette relation en  $T$  :

$$W_m = -RT_B + P_B V_{A,m} = -RT_B + \frac{P_B}{P_A} RT_A$$

Le premier principe dit alors que :

$$\frac{1}{\gamma - 1} R(T_B - T_A) = -RT_B + \frac{P_B}{P_A} RT_A$$

ce qui permet de calculer, avec  $\gamma = \frac{7}{5} = 1,4$  :

$$T_B = \frac{T_A}{\gamma} + \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{P_B}{P_A} T_A = 264,7 \text{K}$$

Une fois qu'on a ça, on trouve facilement  $V_{A,m} = 5,71 \text{L}$  et  $V_{B,m} = 22,0 \text{L}$ , ainsi que  $\Delta U_m = W_m = -1,63 \text{kJ}$  et  $Q_m = 0$ .

Pour l'entropie, on a  $S_m^e = 0$  car adiabatique, donc  $S_m^c = \Delta S_m = \frac{7R}{2} \ln \frac{T_B}{T_A} - R \ln \frac{P_B}{P_A} = 5,82 \text{J.K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$  manifestement irréversible car évidemment non adaptée en pression (on change le volume avec  $p^{ext} \neq p$ )

**III** On utilise les relations  $\gamma = -\frac{f'}{FA} = \frac{\overline{F'A'}}{f'}$ , ou  $\gamma = -\frac{1}{VFA} = \overline{F'A'}V$

On en déduit que  $\overline{FA} = -50 \text{cm}$  et  $\overline{F'A'} = 12,5 \text{cm}$ , soit :

$$\overline{OA} = -75 \text{cm} ; \overline{OA'} = 37,5 \text{cm}$$

**IV** Si elles pouvaient rester alignées avec le soleil, cela signifie qu'elles auraient même période. Or la période croît avec la distance au soleil, donc deux planètes sur des orbites différentes ne peuvent pas rester aligner.

**V** Il faut déterminer la résistance équivalente à  $(R//2R) + (4R//R) = \frac{22}{15}R$  donc  $i = \frac{15E}{22R}$

## Mardi - S2

I On cherche donc l'image d'un point situé à l'infini, donc  $A_\infty \xrightarrow{L_1} A_1 \xrightarrow{L_2} F'$

$A_1$  est par définition  $F'_1$  donc  $F'$  est manifestement l'image par  $L_2$  de  $F'_1$ .

On va utiliser la relation aux foyers pour  $L_2$  :  $\overline{F_2 F'_1} \cdot \overline{F'_1 F'} = -f_2'^2$  Or  $F'_1 = F'_2$  donc  $\overline{F_2 F'_1} = \overline{F_2 F'_2} = 2f'_2$

On en déduit :

$$\overline{F'_2 F'} = -\frac{f_2'}{2}$$

Or on cherche  $\overline{O_1 F'} = \overline{O_1 F'_1} + \overline{F'_1 F'} = f'_1 - \frac{f'_2}{2} = 12,5 \text{ cm}$

II Il est facile de trouver l'équation différentielle en  $i$ , qui par ailleurs est continue donc  $i(0) = 0$  :

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E$$

On trouve alors rapidement, en posant  $\tau = \frac{L}{R}$  que :

$$i(t) = \frac{E}{R} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

On trouve  $u$  en écrivant  $u = L \frac{di}{dt}$  :

$$u(t) = E e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Après on peut déterminer  $\tau = 300 \mu\text{s} \ln\left(\frac{9}{7,6}\right) = 50,7 \mu\text{s}$ , donc  $L = 50,7 \text{ mH}$ , valeur un peu absurde...

III III.1 L'énergie mécanique s'écrit  $E_m = \frac{1}{2}mv^2 + mgz$ . Cette énergie est conservée et vaut  $\frac{1}{2}mv_0^2$ .  $z$  est manifestement maximale quand  $v = 0$  donc :

$$h = \frac{v_0^2}{2g}$$

III.2 On a ensuite l'étude assez classique du mouvement uniformément accéléré, qui mène à :

$$\overrightarrow{OM}(t) = \frac{1}{2} \vec{g} t^2 + \vec{v}_0 t$$

soit en projection :

$$x(t) = v_0 \cos \alpha t \quad ; \quad z(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin \alpha t$$

On en déduit  $t = \frac{x(t)}{v_0 \cos \alpha}$  puis comme demandé :

$$z = -\frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha} + \tan \alpha x$$

Si un point de coordonnées  $x_0, z_0$  est atteint, cela signifie que :

$$z_0 + \frac{g x_0^2}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha} + \tan \alpha x_0 = 0$$

Que l'on doit résoudre en  $\alpha$  ( $v_0$  est donné, seul  $\alpha$  peut changer). Or  $\frac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2$  donc l'équation se réécrit :

$$\frac{g x_0^2}{2 v_0^2} \tan^2 \alpha + x_0 \tan \alpha + z_0 + \frac{g x_0^2}{2 v_0^2} + z_0 = 0$$

On reconnaît un polynôme du second degré en  $\tan \alpha$ , qui n'a de solution réelle et positif que si (et il en faut une positive) son discriminant est positif, donc :

$$x_0^2 - 4 \frac{gx_0^2}{2v_0^2} \left( \frac{gx_0^2}{2v_0^2} + z_0 \right) > 0$$

ce qui se réécrit :

$$x_0^2 \left[ 1 - 4 \frac{g^2 x_0^2}{4v_0^4} - 4 \frac{gz_0}{2v_0^2} \right] > 0$$

que l'on peut réécrire en se souvenant que  $h = \frac{v_0^2}{2g}$  :

$$1 > \frac{x_0^2}{4h^2} + \frac{z_0}{h}$$

(où on voit que tout ceci est bien homogène...) Ceci permet d'extraire  $z_0$ , puisque  $h > 0$  :

$$z_0 < h - \frac{x_0^2}{4h}$$

Si on trace les points de coordonnées  $(x_0, z_0)$ , on trouve une parabole qui contient les points atteignables par le tir : en dehors de cette parabole de sûreté, on ne peut pas être atteint.

**IV** On considère une spire circulaire de centre  $O$  et d'axe  $(O, \vec{e}_z)$ , parcourue par un courant  $I$ . On appelle  $\vec{B} : P \mapsto \vec{B}(P)$  le champ magnétique généré par cette spire ( $P$  désigne un point quelconque de l'espace).

**IV.1**  $\mathcal{P}$  est manifestement un plan d'antisymétrie pour la distribution de courant, donc de symétrie pour  $\vec{B}$ . Or un champ vectoriel est contenu dans ses plans de symétrie en tout point de ces plans.

**IV.2**  $\mathcal{S}$  est un plan de symétrie pour la distribution de courant.  $\vec{B}(P)$  est donc orthogonal à  $\mathcal{S}$  en tout point  $P$  de  $\mathcal{S}$ .

**IV.3**  $\vec{e}_z$  appartient à tout plan  $\mathcal{P}$  défini comme à la première question, donc en tout point  $P$  de  $(O, \vec{e}_z)$ ,  $\vec{B}$  appartient à ces plans. On en déduit que  $\vec{B}$  est colinéaire à  $\vec{e}_z$  en tout point  $P$  de l'axe  $(O, \vec{e}_z)$ .

**V** Tant qu'on est en dessous de  $100^\circ\text{C}$ , l'eau va simplement changer de température. Pendant  $dt$ , elle reçoit une énergie thermique  $\delta Q = Pdt$ , donc on a :

$$Pdt = mc_e dT$$

ce qui s'intègre en :

$$T = T_0 + \frac{P}{mc_e} t$$

Cette phase dure pour 1L  $t_1 = \frac{80\text{K}}{6000\text{W} \cdot 4,18\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{g}^{-1} \cdot 1000\text{g}} = 55\text{s}$

Au-delà de  $t_1$ , l'eau va rester à  $100^\circ\text{C}$  et va s'évaporer. Pendant  $dt$ , on a :

$$Pdt = -dml_e =$$

où  $dm$  est la variation de la masse d'eau (on a  $dm_v = -dm$ ) On a alors :

$$m(t) = m_0 - \frac{P}{l_e} (t - t_1)$$

On peut calculer le temps qu'il faut pour faire s'évaporer la totalité d'1L d'eau :

$$\Delta t = \frac{m_0 l_e}{P} = 376\text{s}$$

c'est-à-dire 6mn16s.

## Mercredi - S2

**I** C'est un des cas de base du cours, on trouve rapidement que le flux de  $\vec{B}_0$  dans la spire vaut  $\Phi = B_0 S \cos(\omega t)$ , ce qui génère une f.e.m. :

$$e = B_0 S \omega \sin(\omega t)$$

L'intensité est alors donnée par  $i = \frac{B_0 S \omega}{R} \sin(\omega t)$ , dont l'amplitude est  $I_m = \frac{B_0 S \omega}{R}$ . On a donc :

$$\omega = \frac{I_m R}{B_0 S} = 1393 \text{rd/s}$$

Ce qui donne une fréquence de  $f = 222 \text{Hz}$

**II** On trouve immédiatement  $T_A = 128 \text{K}$  et  $T_B = 36,5 \text{K}$ . Ce gaz parfait étant monoatomique, on a  $C_{v,m} = \frac{3}{2}R$ ,  $C_{p,m} = \frac{5}{2}R$  et  $\gamma = \frac{5}{3}$ .

La chaleur reçue vaut  $Q_m = C_{p,m} \Delta T = \frac{5}{2} P_A (V_{B,m} - V_{A,m}) = -1,902 \text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$  (négatif puisque c'est un refroidissement).

Le travail reçu vaut  $W_m = -P_A \Delta V = 760,7 \text{J} \cdot \text{mol}^{-1}$ , puisque c'est probablement une monobare en tant qu'isobare contrôlée.

La variation d'énergie interne est donnée soit par la somme des deux, soit par  $C_{v,m} \Delta T$ , ce qui mène dans les deux cas à  $\Delta U_m = -1,141 \text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$  (négatif, le gaz se refroidit).

On a évidemment  $T^{ext} = T_B = 36,5 \text{K}$

On peut calculer simplement  $\Delta S_m = C_{p,m} \ln \frac{T_B}{T_A} = -26 \text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ , négative puisque le gaz se refroidit.

De même, on a une monotherme donc  $S_m^e = \frac{Q}{T_B} = -52,1 \text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ , négative car on évacue de la chaleur.

Enfin, on trouve  $S_m^c = \Delta S_m - S_m^e = 26 \text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ , bien évidemment positive, la transformation n'étant adaptée ni en pression, ni en température.

**III** On analyse tout d'abord le circuit :  $u(+\infty) = 0$  (la bobine va court-circuiter l'ensemble) et  $u(0) = 0$  par continuité de la tension aux bornes du condensateurs. On a aussi  $i_L(0) = 0$ , ainsi que  $i_R(0) = 0$  car  $u(0) = 0$ . Or  $\frac{du}{dt}(0) = \frac{ic(0)}{C} = \frac{i(0)}{C} = \frac{E}{rC}$ . On a les conditions initiales, et on sait que l'équation différentielle en  $u$  a un second membre nul en raison de son comportement en l'infini.

On a alors :  $u + ri = E$ , qu'on va dériver en raison de l'argument ci-dessus :

$$\frac{du}{dt} + r \left( \frac{di_C}{dt} + \frac{di_L}{dt} + \frac{di_R}{dt} \right) = 0$$

soit

$$\frac{du}{dt} + rC \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{ru}{L} + \frac{r}{R} \frac{du}{dt} = 0$$

ce qui donne l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \left( \frac{1}{rC} + \frac{1}{RC} \right) \frac{du}{dt} + \frac{u}{LC} = 0$$

On peut poser  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 4082 \text{rd/s}$  et  $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{1}{rC} + \frac{1}{RC}$ , soit  $Q = \sqrt{\frac{C}{L}} \frac{rR}{r+R} = 0,406$

On est donc en régime aperiodique ( $Q < \frac{1}{2}$ ), donc :

$$u(t) = e^{-\omega_0 t Q} [A \cosh(\omega t) + B \sinh(\omega t)]$$

avec  $\omega = \omega_0 \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1} = \frac{0,717}{\sqrt{LC}}$

On a immédiatement que  $A = 0$ , et en dérivant, que  $B\omega = \frac{E}{rC}$ , soit :

$$u(t) = \frac{E\sqrt{LC}}{0,717rC} e^{-\frac{r+R}{rRC}t} \sinh\left(0,717 \frac{t}{\sqrt{LC}}\right)$$

**IV** Le théorème de Huygens indique alors que le moment d'inertie autour de  $\Delta'$ , noté  $I$ , vaudra  $I = I_{\Delta} + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2$

**IV.1** Si on applique le théorème du moment cinétique autour de l'axe  $\Delta'$ , en cylindriques en considérant  $\vec{e}_z = \vec{e}_{\Delta'}$  et que  $\theta$  est l'angle entre la verticale descendante et  $OG$  où  $G$  est le centre de masse du cylindre et  $O$  le projeté de  $G$  sur l'axe  $\Delta'$ , alors on trouve, puisque le moment du poids vaut  $-mga \sin \theta$  (on utilise la formule (distance à l'axe)  $\times$  (composante orthoradiale de la force)) et que le moment de la liaison pivot vaut 0 :

$$\frac{3}{2}mR^2\ddot{\theta} = -mgR \sin \theta$$

ce qui permet de retrouver que  $\theta = 0$  est position d'équilibre et que dans le cadre des petits mouvements :

$$\frac{3}{2}mR^2\ddot{\theta} + mgR\theta = 0$$

ce qui montre que  $\omega_0 = \sqrt{\frac{2g}{3R}}$ , soit  $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{3R}{2g}}$

Si on passe par le théorème de l'énergie mécanique, il faut écrire que  $E_c = \frac{3}{4}mR^2\dot{\theta}^2$  et que  $E_p = mgz_{asc} = -mgR \cos \theta$ , donc

$$E_m = \frac{3}{4}mR^2\dot{\theta}^2 - mgR \cos \theta$$

Cette énergie mécanique est conservée car il n'y a pas de frottements et la liaison pivot ne travaille pas (le point d'application est situé sur l'axe  $\Delta'$ ), donc  $\frac{dE_m}{dt} = 0$ , soit :

$$\dot{\theta} \left( \frac{3}{2}mR^2\ddot{\theta} + mgR \sin \theta \right) = 0$$

ce qui mène à la même équation différentielle du mouvement que précédemment, et donc à la même période.

**IV.2** C'est en fait indépendant de la masse, et donc de la masse volumique (l'âge du capitaine quoi...). On a :

$$R = \frac{T_0^2 g}{6\pi^2} = 4,14\text{m}$$

**V** Déjà on peut immédiatement déduire que :

- la lentille est convergente (seul cas où d'un objet réel on a une image réelle)
- sa distance focale est inférieure à 40cm, et même inférieure à 20cm : le grandissement étant inférieur à 1, on est au-delà de  $2f'$

Il faut faire alors très attention à cet énoncé qui ne donne aucune distance algébrique. Dans le cas objet réel  $\rightarrow$  image réelle, le grandissement est quoi qu'il arrive négatif. On a donc  $\gamma = -\frac{1}{2}$ .

A partir de ce moment là, on sait que  $\gamma = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$ , avec  $\overline{OA} = -40\text{cm}$  (objet réel), et donc que  $\overline{OA'} = 20\text{cm}$ .

On observe un objet réel de 10cm via une lentille de distance focale  $f'$ , située à 40cm de l'objet. L'image est alors réelle de taille 5cm. En déduire la distance focale de la lentille, et la distance entre la lentille et l'image. Pour trouver la distance focale, le moins acrobatique est visiblement la relation de conjugaison au centre :

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}}$$

ce qui mène à  $f' = 13,3\text{cm}$

## Jeudi - S2

**I** On va utiliser la loi des aires pour la Terre et pour la comète. On sait que  $T^2 = Ka^3$ , avec  $K$  une constante qui vaut  $K = 1\text{an}^2\text{u.a.}^{-3}$ . Si on applique cela à la comète Néowise, on trouve  $T = \sqrt{Ka^3} = 23,32\text{an}$  (soit 23 ans et 117 jours environ).

Le moment cinétique massique vaut d'après le cours  $C$ , constante des aires, et on sait que  $\frac{dA}{dt} = \frac{A}{T} = \frac{C}{2}$ , ce qui permet de déduire :

$$C = 2\frac{A}{T} = 3168\text{u.a.}^2/\text{an} = 2,259 \cdot 10^{18}\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

Or la vitesse au périhélie est reliée au moment cinétique massique par  $v_P d_P = l_s$ , donc  $v_p = \frac{l_s}{d_P} = 1,075\text{u.a.}/\text{an} = 1,84 \cdot 10^8\text{km}/\text{h} = 5,1 \cdot 10^7\text{m}/\text{s}$  (ça va vite et ça commence à devenir relativiste).

**II** On est visiblement en monobare équilibrée au début et à la fin donc  $Q = \Delta m L_{vap} = 1,35\text{kg} \cdot (2700 - 410)\text{kJ}/\text{kg} = 3,09\text{MJ}$

Le travail est donné par  $W = -P_S \Delta V \approx -P_S \Delta V_{vap} = -\frac{\Delta m}{M_{H_2O}} RT$  en assimilant la vapeur d'eau à un gaz parfait (le volume de vapeur produit vaut  $\frac{n_{vap} RT}{P_S}$ ), et en négligeant le volume initial de liquide, ce qui mène à  $W = -0,233\text{MJ}$  ( $T = 373,15\text{K}$ )

On en déduit  $\Delta H = Q = 3,09\text{MJ}$  et  $\Delta U = Q + W = 2,86\text{MJ}$ . Enfin,  $\Delta S = \frac{\Delta H}{T} = 8,28\text{kJ} \cdot \text{K}^{-1}$ , positif puisque le système passe d'une phase à une phase moins ordonnée.

**III** Si on fait cela sans approximation aucune (i.e. en regardant les courbes et non les asymptotes), on trouve (on prend -3dB donc  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  et -26 dB donc  $\frac{1}{20}$  (-20 : division par 10, -6 : division par 2) :

$$s(t) = \frac{E_1}{\sqrt{2}} \cos(2\pi f_1 t - 0,4) + \frac{E_1}{20} \cos(2\pi f_2 t - 2,6)$$

Dans l'esprit du programme, on écrirait plutôt (en n'utilisant que les asymptotes) :

$$s(t) \approx \frac{E_1}{\sqrt{2}} \cos 2\pi f_1 t$$

**IV** Il y a un peu d'analyse à faire ici. On a, en appelant  $i$ ,  $i_R$  et  $i_L$  les intensités dans les diverses branches :

$$i = i_R + i_L$$

donc

$$\frac{e-u}{R_0} = \frac{u}{R} + i_L$$

On dérive tout :

$$0 = \frac{1}{R_0} \frac{du}{dt} + \frac{1}{R} \frac{du}{dt} + \frac{v}{L}$$

soit :

$$\left( \frac{1}{R_0} + \frac{1}{R} \right) \frac{du}{dt} + \frac{u - r i_L}{L}$$

Or  $i_L = i - i_R = \frac{e-u}{R_0} - \frac{u}{R}$ , donc on trouve finalement :

$$\left( \frac{1}{R_0} + \frac{1}{R} \right) \frac{du}{dt} + \frac{1}{L} \left( 1 + \frac{r}{R_0} + \frac{r}{R} \right) u = e \frac{r}{LR_0}$$

ce qui se réécrit, en multipliant par  $\frac{RR_0}{R+R_0}$  :

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{L(R+R_0)} (RR_0 + rR + rR_0) u = e \frac{rR}{L(R+R_0)}$$

soit en se souvenant que les trois résistances valent  $R$  :

$$\tau = \frac{3L}{2R} = 4,5\mu\text{s}$$

V On cherche à résoudre  $F \xrightarrow{L_1} A' \xrightarrow{L_2} \infty$ , par définition de  $F$ . On en déduit que  $A' = F_2$  et donc que  $F$  est l'objet conjugué de  $F_2$  par  $L_1$ . On a donc (on choisit la relation au centre car on a une indication sur les centres dans l'énoncé) :

$$\frac{1}{\overline{O_1 F_2}} - \frac{1}{\overline{O_1 F}} = \frac{1}{f'_1}$$

soit :

$$\overline{O_1 F} = \frac{1}{\frac{1}{\overline{O_1 F_2}} - \frac{1}{f'_1}}$$

Or  $\overline{O_1 F_2} = \overline{O_1 O_2} + \overline{O_2 F_2} = -1\text{cm}$  donc :

$$\overline{O_1 F} = -0,75\text{cm}$$

Si on place un objet  $AB$  de taille  $d$  en  $F$ , il va générer une image  $A'B'$  par  $L_1$  qui va être dans le plan focal objet de  $L_2$  (cf. le raisonnement initial). On a :

$$\overline{A'B'} = \overline{AB} \cdot \frac{\overline{O_1 A'}}{\overline{O_1 A}} = d \frac{\overline{O_1 F_2}}{\overline{O_1 F}} = \frac{4}{3}d$$

Ceci permet de déduire que l'angle de sortie sera  $\alpha = -\frac{\overline{A'B'}}{f'_2} = -\frac{4d}{3f'_2}$

## Vendredi - S2

**I I.1** On trouve que 7 pseudo-périodes correspondent à  $125\text{ms} - 4\text{ms} = 121\text{ms}$  donc  $T = 17,3\text{ms}$

**I.2** C'est la démonstration classique du cours. On mesure ici  $\delta = \ln \frac{7}{5,8} = 0,188$  donc  $Q = 16,7$

**II** Alors  $A$  est de masse nulle donc c'est un "transmetteur de force" : le TQM indique que la somme des forces sur  $A$  est toujours nulle, quelque soit le mouvement de  $A$ . On a donc :

$$k_1(l_1 - l_{0,1}) = k_2(l_2 - l_{0,2})$$

On peut alors remplacer  $l_2$  par  $l - l_1$ , donc :

$$k_1(l_1 - l_{0,1}) = k_2(l - l_1 - l_{0,2})$$

ce qui mène à :

$$l_1 = \frac{k_2 l - k_2 l_{0,2} + k_1 l_{0,1}}{k_1 + k_2}$$

La force subie par  $M$  vaut alors, si  $\vec{e}_x$  désigne un vecteur unitaire vers le bas :

$$\vec{F} = -k_1(l_1 - l_{0,1})\vec{e}_x$$

On remplace :

$$\vec{F} = -\frac{k_1}{k_1 + k_2}(k_2 l - k_2 l_{0,2} + k_1 l_{0,1} - (k_1 + k_2)l_{0,1})\vec{e}_x$$

soit :

$$\vec{F} = -\frac{k_1}{k_1 + k_2}(k_2 l - k_2(l_{0,2} + l_{0,1}))\vec{e}_x$$

ou enfin :

$$\vec{F} = -\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}(l - (l_{0,2} + l_{0,1}))\vec{e}_x$$

On a donc un ressort de longueur  $l$ , de raideur  $\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$  et de longueur à vide (ceci était prévisible)  $l_{0,e} = l_{0,2} + l_{0,1}$

**III** On a directement  $P_B = 5\text{bar}$ . On peut également calculer  $V_{A,m} = 4,043\text{L}\cdot\text{mol}^{-1}$  et  $V_{B,m} = 4,79\text{L}\cdot\text{mol}^{-1}$

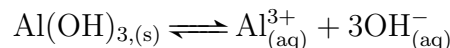
On a une isobare donc  $Q_m = C_{p,m}\Delta T = \frac{7}{2}R\Delta T = 1,31\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$  (positif, le gaz reçoit de la chaleur).

On peut déterminer  $\Delta U_m = C_{v,m}\Delta T = \frac{5}{2}R\Delta T = 935\text{J}\cdot\text{mol}^{-1}$  (positif, car le gaz s'échauffe).

On en déduit le travail (on aurait pu aussi passer par le travail monobare) :  $W_m = -R\Delta T = -374\text{J}\cdot\text{mol}^{-1}$  (négatif, ce qui est normal vu que le gaz s'expand)

On peut finalement déduire  $\Delta S_m = C_{p,m} \ln \frac{T_B}{T_A} = 4,94\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$  (positive, le gaz s'échauffe et est plus "désordonné", ainsi que  $S_m^e = \frac{Q_m}{T_B} = 4,54\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$  (positif, le gaz reçoit de la chaleur), et enfin  $S_m^c = \Delta S_m - S_m^e = 0,396\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$  (strictement positive, la transformation étant inadaptée en température, donc irréversible).

**IV IV.1** Le précipité doit être neutre, donc sa formule est  $\text{Al}(\text{OH})_{3,(s)}$ . On écrit la réaction de dissolution :



Juste à l'apparition du précipité, on a, puisque le précipité existe  $[\text{Al}^{3+}][\text{OH}^{-}]^3 = K_S$ , et les concentrations en ions n'ont pas évolué car on n'a formé qu'une quantité infime de précipité. On a donc :

$$K_S = 0,1 \cdot 10^{(3,6-14)3} = 6,3 \cdot 10^{-33}$$



**IV.2** On écrit déjà la réaction partant du précipité, de constante  $K'$  :  $\text{Al}(\text{OH})_{3,(s)} + \text{OH}^-_{(aq)} \rightleftharpoons \text{Al}(\text{OH})_{4,(aq)}^-$  Si on se place juste avant la disparition du précipité, on sait que :

- tout l'aluminium se trouve dans le complexe, donc  $[\text{Al}(\text{OH})_{4,(aq)}^-] = 0,1M$
- $[\text{OH}^-] = 10^{-1,5} \text{ mol/L}$
- le précipité existe encore, donc  $Q$  de la réaction est défini :  $K = \frac{[\text{Al}(\text{OH})_{4,(aq)}^-]}{[\text{OH}^-]}$

On en déduit  $K' = 10^{0,5}$

Or la réaction  $\text{Al}^{3+}_{(aq)} + 4\text{OH}^-_{(aq)} \rightarrow \text{Al}(\text{OH})_{4,(aq)}^-$  est la somme de la réaction de constante  $K'$  et de la réaction de précipitation. Sa constante vaut donc :

$$K = K'K_S = 3,15 \cdot 10^{-33}$$

## V Etude rapide d'une voiture

**V.1** Le TQM indique que, puisque la vitesse de la voiture est constante,  $\vec{F} + \vec{f}_1 + \vec{f}_2 = 0$

**V.2** Si on se place dans le référentiel de la voiture, chaque centre de roue  $O_i$  est fixe, et donc on peut appliquer le TMC. Chaque roue tournant à vitesse constante, le moment cinétique est constant, et donc la somme des couples et moments est nulle :

$$\vec{\Gamma}_i + \vec{O_i A_i} \wedge \vec{f}_i = \vec{0}$$

**V.3** Il faut que la roue et la route se déplacent à la même vitesse (c'est la définition de "ne dérape pas"). Or la route est immobile dans son propre référentiel, donc :

$$\vec{v}_{A_i} = \vec{0}$$

On applique alors la relation donnée par l'énoncé :

$$\vec{0} = \vec{v} - \vec{\Omega} \wedge \vec{O_i A_i}$$

Si on projette cette relation selon  $\vec{e}_x$ , on trouve  $v = v_O = R\Omega$ .

**V.4**  $\vec{f}_1$  fait bien avancer la voiture, c'est la seule force dirigée vers les  $x$  croissants, mais dans le référentiel de la route, la puissance de  $\vec{f}_1$  vaut  $\vec{f}_1 \cdot \vec{v}_{A_1} = \vec{0}$  (c'est aussi le cas de  $\vec{f}_2$ ), donc  $\vec{f}_1$  ne travaille pas (dans le référentiel de la route).

**V.5** Si on regarde les puissances, on a donc les  $\vec{f}_i$  qui ne travaillent pas. On a ensuite :

- $P^{\vec{F}} = \vec{F} \cdot \vec{v} = -Fv < 0$  (c'est en fait ce contre quoi on doit lutter, les frottements de l'air)
- $P^{\vec{\Gamma}_1} = \vec{\Gamma}_1 \cdot \vec{\Omega} = -(\vec{O_1 A_1} \wedge \vec{f}_1) \cdot \vec{\Omega} = -(\vec{\Omega} \wedge \vec{O_1 A_1}) \cdot \vec{f}_1 = -\vec{v} \cdot \vec{f}_1 = f_1 v > 0$  si  $f_1$  propulse la voiture.
- $P^{\vec{\Gamma}_2} = -f_2 v < 0$  (frottements)

**V.6** Si on se place dans le référentiel  $R_v$ ,  $v_{A_1}$  vaut cette fois  $-\vec{v}$  (c'est toujours la vitesse de la route, mais dans l'autre référentiel). On a donc  $P^{\vec{f}_1} = f_1 v > 0$  : la voiture reçoit bien du travail de  $f_1$ .

On aurait pu appliquer le théorème de l'énergie cinétique : cette dernière vaut toujours 0 dans le référentiel de la voiture (elle est immobile dans son propre référentiel), donc la somme des travaux vaut 0. En se limitant à la roue 1, on a donc que  $P^{\Gamma_1} + P^{\vec{f}_1} = 0$ .  $P^{\Gamma_1} < 0$  car la voiture produit ce travail, et ce travail est récupéré par  $\vec{f}_1$ .